

ASAL SAYILAR

Asal sayılar, 1 ve kendisinden başka pozitif tam böleni olmayan 1' den büyük tamsayılarıdır. En küçük asal sayı, 2' dir. 2 asal sayısı dışında çift asal sayı yoktur. Yani, 2 sayısı dışındaki tüm asal sayılar tek sayıdır. Asal sayılar kümesi,

$$\{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots \}$$

dir.

Fermat Teoremi' ne göre, n asal sayı olmak üzere, $2^n - 1$ şeklinde yazılabilen sayılar asal sayıdır. Örneğin,

$$2^2 - 1, 2^3 - 1, 2^5 - 1, 2^7 - 1, 2^{11} - 1, \dots$$

sayıları, asal sayıdır.

Aralarında asal sayılar:

1' den başka pozitif ortak böleni olmayan sayılara, **aralarında asal sayılar** adı verilir. Birden fazla sayının aralarında asal olması için, bu sayıların asal sayı olması gerekmez. Asal sayılar, kesinlikle aralarında asal sayılardır. Bununla birlikte, 10 ve 81 sayısı birer asal sayı olmamasına rağmen, aralarında asal sayılardır. Diğer taraftan, 10 ile 8 sayısı birer asal sayı olmamasına rağmen, 2 ortak bölenleri olduğu için, aralarında asal sayılar değildir. Bir sayı aralarında asal iki sayıya bölünebiliyorsa, bu iki sayının çarpımına da bölünür.

Örneğin,

- 2, 9
- 10, 81
- 5, 29
- 3, 8
- 2, 10, 35

sayı grupları, ortak tam bölenleri olmadığı için aralarında asal sayılardır.

Asal olmayan sayılara da **bileşik sayı** adı verilir. Dolayısıyla, bileşik sayıların 1 ve kendisinden başka bölenleri vardır. Örneğin, 10 sayısı bir bileşik sayıdır. Çünkü, 10 sayısının 1 ve kendisinden başka, 2 ile 5 böleni vardır. Buradan, asal olmayan 10 sayısı, birer asal sayı olan 2 sayısı ile 5 sayısının çarpımı olarak yazılabilir. 2 ile 5 sayısına, 10 sayısının **asal çarpanı** veya **böleni** denir. Yani, bileşik bir sayı, asal sayıların çarpımı şeklinde yazılabilir.

Örnek:

Aşağıdaki sayı gruplarından hangisi aralarında asaldır?

a) 4, 20 b) 6, 21 c) 27, 36, 39 d) 8, 24, 36 e) 3, 5, 25

Çözüm:

- a) 4 ile 20' nin ortak böleni vardır ve bu da 2 ile 4' tür.
b) 6 ile 21' in ortak böleni vardır ve bu da 3' tür.
c) 27, 36 ve 39' un ortak böleni vardır ve ortak bölen 3' tür.
d) 8, 24 ve 36' nın ortak böleni vardır ve ortak bölen 2 ve 4' tür.
e) 3, 5 ve 25' in ortak böleni yoktur. Çünkü, bu üç sayıyı birden bölen 1' den başka sayı yoktur. Dolayısıyla, bu sayılar aralarında asaldır.

Örnek :

a, b ve c birbirinden farklı rakamlar olmak üzere, ab ile bc iki basamaklı aralarında asal sayılardır. Buna göre, $ab + bc$ toplamının en küçük değeri kaçtır?

Çözüm:

Toplamın en küçük olması için, sayıları en küçük almalıyız. Buna göre, $ab = 21$ olurken, $bc = 13$ olmalıdır. Dolayısıyla,

$$ab + bc = 21 + 13 = 34$$

olur.

SAYILARIN ASAL ÇARPANLARINA AYRILMASI

Her bileşik sayı, asal sayıların veya asal sayıların kuvvetlerinin çarpımı şeklinde yazılabilir. Bu işlemi yapmak için, ilgili sayının sırasıyla en küçük asal sayıdan başlanarak bölünebilmesi araştırılır.

BİR SAYMA SAYISININ TAMSAYI BÖLENLERİ **Bir sayma sayısının pozitif tamsayı bölenlerinin sayısı:**

Herhangi bir A sayma sayısının asal çarpanları a, b ve c olmak üzere,

$$A = a^m \cdot b^n \cdot c^p$$

şeklinde asal çarpanlarına ayrılmış ise, A sayma sayısının pozitif tamsayı bölenlerinin sayısı,

$$(m + 1) \cdot (n + 1) \cdot (p + 1)$$

dir. Bu sayıya, 1 ile sayının kendisi dahil edilmiştir.

Bir sayma sayısının tüm tamsayı bölenlerinin sayısı:

Herhangi bir A sayma sayısının asal çarpanları a, b ve c olmak üzere,

$$A = a^m \cdot b^n \cdot c^p$$

şeklinde asal çarpanlarına ayrılmış ise, A sayma sayısının tüm tamsayı bölenlerinin sayısı,

$$2 \cdot (m + 1) \cdot (n + 1) \cdot (p + 1)$$

dir. Yani, A sayma sayısının tüm tamsayı bölenlerinin sayısı, pozitif bölenlerinin sayısının 2 katıdır. Bu sayıya, 1 ile sayının kendisi dahil edilmiştir.

Bir sayma sayısının pozitif tamsayı bölenlerinin toplamı:

Herhangi bir A sayma sayısının asal çarpanları a, b ve c olmak üzere,

$$A = a^m \cdot b^n \cdot c^p$$

Bu toplama, 1 ile sayının kendisi dahil edilmiştir. **Bir sayma sayısının tüm tamsayı bölenlerinin toplamı ise, sıfırdır.**

Bir sayma sayısının pozitif tamsayı bölenlerinin çarpımı:

Herhangi bir A sayma sayısının asal çarpanları a, b ve c olmak üzere,

$$A = a^m \cdot b^n \cdot c^p$$

şeklinde asal çarpanlarına ayrılmış ise, A sayma sayısının pozitif tamsayı bölenlerinin çarpımı, üssün A'nın pozitif tamsayı bölenlerinin yarısı kadardır.

Örnek :

120 sayısının

- a) Kaç tane pozitif böleni vardır?
- b) Kaç tane tamsayı böleni vardır?
- c) Pozitif bölenlerinin toplamı kaçtır?
- d) Pozitif bölenlerinin çarpımı kaçtır?

Çözüm:

a) 120 sayısının asal çarpanlarına ayrılmış şekli

$$120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

olduğundan, pozitif bölenlerinin sayısı

$$(3 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

dir.

b) 120 sayısının tüm bölenlerinin sayısı, pozitif bölenlerinin sayısının 2 katı olduğuna göre,

$$2 \cdot 16 = 32$$

dir.

c) 120 sayısının pozitif bölenlerinin toplamı 360 olur.

d) 120 sayısının pozitif bölenlerinin çarpımı 8 dir.

$$120$$

Örnek :

$500 \cdot 5^y$ sayısının asal olmayan 40 tane tamsayı böleni varsa, y kaçtır?

Çözüm:

$$\begin{aligned} 500 \cdot 5^y &= 2^2 \cdot 5^3 \cdot 5^y \\ &= 2^2 \cdot 5^{3+y} \end{aligned}$$

2 tane asal böleni olduğundan, tüm bölenlerinin sayısı,

$$40 + 2 = 42$$

dir. Buradan, pozitif bölenlerinin sayısı, tüm bölenlerinin sayısının yarısı olduğundan,

$$21 = (2 + 1) \cdot (3 + x + 1)$$

$$21 = 3 \cdot (4 + x)$$

$$21 = 12 + 3x$$

$$3x = 21 - 12$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

olur.

OBEB (ORTAK BÖLENLERİN EN BÜYÜĞÜ)

OBEB, iki veya daha çok sayıyı aynı anda bölebilen en büyük sayıdır. Verilen sayıların OBEB'ini bulmak için, sayılar asal çarpanlarına ayrılır ve ortak asal çarpanların en küçük üsleri alınır.

1. Aralarında asal iki sayının OBEB' i 1' dir. Yani, a ile b aralarında asal iki sayı ise, $(a, b)_{\text{OBEB}} = 1$ dir.
2. Aynı zamanda, ikiden çok sayıdaki sayılardan en az iki tanesi aralarında asal ise, bu sayıların OBEB' i 1' dir. Yani, a, b, c, d, e sayılarından a ile b aralarında asal ise, $(a, b, c, d, e)_{\text{OBEB}} = 1$ dir.
3. İki veya daha fazla sayının **ortak tam bölenlerinin sayısı, OBEB' inin bölenlerinin sayısına eşittir.**
4. Ardışık iki sayma sayısının OBEB' i 1' dir. Yani, a ile b **ardışık iki sayma sayısı** olmak üzere, $(a, b)_{\text{OBEB}} = 1$ dir.

Örnek :

18, 30, 42 sayılarının OBEB' i kaçtır?

Çözüm:

$$18 = 2.3^2$$

$$30 = 2.3.5$$

$$42 = 2.3.7$$

Her üç sayının ortak asal çarpanlarının en küçük üslüsü alınmalıdır. Dolayısıyla, $(18, 30, 42)_{\text{OBEB}} = 2.3 = 6$ dir.

Örnek :

100 ile 120 sayılarının OBEB' i kaçtır?

Çözüm:

$$100 = 2^2.5^2$$

$$120 = 2^3.3.5$$

Her iki sayının ortak asal çarpanlarının en küçük üslüsü alınmalıdır. Dolayısıyla, $(100, 120)_{\text{OBEB}} = 2^2.5 = 20$ dir.

Örnek :

6, 15 ve 29 sayılarının OBEB' i kaçtır?

Çözüm:

İkiden çok sayıdaki sayıların en az iki tanesi aralarında asal ise, bu sayıların OBEB' i 1 olduğundan, verilen sayılardan 6 ile 29 sayısı veya 15 ile 29 sayısı aralarında asal olduğu için
 $(6, 15, 29)_{\text{OBEB}} = 1$
dir.

Örnek :

100 ile 120 sayılarının ortak tam bölenlerinin sayısı kaçtır?

Cözüm:

$(100, 120)_{\text{OBEB}} = 2^2 \cdot 5^1 = 20$
olduğundan, pozitif bölenlerinin sayısı,
 $(2 + 1) \cdot (1 + 1) = 3 \cdot 2 = 6$
bulunur. Buradan, tüm bölenlerin sayısı, pozitif bölenlerin sayısının iki katına eşit olduğundan,
 $2 \cdot 6 = 12$ olur.

Örnek :

Boyutları 9 cm, 12 cm, 15 cm olan dikdörtgenler prizması biçimindeki kutunun içerisi, boş yer kalmayacak şekilde en büyük boyutlu küplerle doldurulmak istenmektedir. Bu kutuya kaç tane küp yerleştirilebilir?

Cözüm:

Kutu en büyük boyutlu küplerle doldurulmak istendiğinden, 9 cm, 12 cm, 15 cm sayılarının OBEB' i bulunmalıdır. Bu nedenle,
 $(9, 12, 15)_{\text{OBEB}} = 3$ tür. Böylece, en büyük boyutlu küpün bir kenarı = 3 cm olur. Bir kenarı 3 cm olacak şekilde yerleştirilebilecek küp sayısı,
 $\text{Küp sayısı} = \text{Kutunun hacmi} / \text{Küpün hacmi} = 9 \cdot 12 \cdot 15 / 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$
tane olur.

Örnek :

Boyutları 24 m ve 60 m olan dikdörtgen şeklindeki bir arsanın çevresine eşit aralıklarla en az sayıda kaç ağaç dikilebilir?

Cözüm:

İki ağacın arasındaki uzaklık, dikdörtgenin boyutlarının OBEB' i olur. Dolayısıyla,
 $(24, 60)_{\text{OBEB}} = 12$
 $\text{Ağaç Sayısı} = \text{Çevre} / 12 = 2 \cdot (24 + 60) / 12 = 84 / 6 = 14$
dir.

OKEK (ORTAK KATLARIN EN KÜÇÜĞÜ)

İki veya daha çok sayının her birine bölünen en küçük sayıdır. Verilen iki veya daha çok sayının OKEK' ini bulmak için, sayılar asal çarpanlarının kuvvetleri cinsinden yazılır ve ortak asal çarpanlarından üsleri en büyük olanlarla ortak olmayan asal çarpanlarının tümü alınarak çarpılır.

1. Aralarında asal sayıların OKEK' i, bu sayıların çarpımlarına eşittir. Yani, a ile b sayısı aralarında asal sayılar ise,

$$(a, b)_{\text{OKEK}} = a \cdot b \text{ dir.}$$

2. a ve b iki doğal sayı olmak üzere, bu iki doğal sayının OBEB' i ile OKEK' inin çarpımı, bu iki doğal sayının çarpımına eşittir. Yani, a ve b doğal sayısı için

$$a \cdot b = (a, b)_{\text{OKEK}} \cdot (a, b)_{\text{OBEB}} \text{ dir.}$$

3. a, b, c, d sayma sayıları olmak üzere,

$$(a/c, b/d)_{\text{OKEK}} = (a, b)_{\text{OKEK}} / (c, d)_{\text{OBEB}} \text{ dir.}$$

4. a ve b iki doğal sayı olmak üzere,

$$(a, b)_{\text{OKEK}} = x \text{ ve } (a, b)_{\text{OBEB}} = y$$

ise, a ile b sayılarının **toplamının en büyük değeri**

$x + y$ dir.

5. Ardışık iki sayma sayısının OKEK' i bu iki sayının çarpımına eşittir. Yani, a ile b **ardışık iki sayma sayısı** olmak üzere,

$$(a, b)_{\text{OKEK}} = a \cdot b \text{ dir.}$$

6. a ile b sayma sayıları olmak üzere, $a < b$ ise,

$$(a, b)_{\text{OBEB}} \leq a \leq b \leq (a, b)_{\text{OKEK}} \text{ dir.}$$

Örnek :

18 ile 45 sayılarının OKEK' ini bulunuz.

Cözüm:

$$\begin{aligned} 18 &= 2 \cdot 3^2 \\ 45 &= 3^2 \cdot 5 \end{aligned}$$

olduğundan, $(18, 45)_{\text{OKEK}} = 3^2 \cdot 2 \cdot 5 = 90$ olur.

Örnek :

a ve b doğal sayılarının OKEK' i 48 ve OBEB' i 8 ve bu sayılardan biri 16 ise, diğer sayı kaçtır?

Cözüm:

a = 16 olsun. $(16, b)_{\text{OKEK}} = 48$ ve $(16, b)_{\text{OBEB}} = 8$ olduğuna göre,

$$a \cdot b = (a, b)_{\text{OKEK}} \cdot (a, b)_{\text{OBEB}}$$

$$16 \cdot b = 48 \cdot 8$$

$$b = 24$$

bulunur.

Örnek :

Herhangi iki doğal sayının OKEK' i 120 ve OBEB' i 8 olduğuna göre, bu sayıların toplamı en çok kaç olabilir?

Cözüm:

İki doğal sayının toplamı en çok bu iki sayının OBEB' ile OKEK' inin toplamı kadar olabileceğinden,

$$120 + 8 = 128 \text{ dir.}$$

Örnek :

Boyutları 2 cm, 4 cm, 6 cm olan dikdörtgenler prizması biçimindeki kutunun içerisi, boş yer kalmayacak şekilde en küçük boyutlu küplerle doldurulmak istenmektedir. Bu kutuya kaç tane küp yerleştirilebilir?

Çözüm:

Kutu en küçük boyutlu küplerle doldurulmak istendiğinden, 2 cm, 4 cm, 6 cm sayılarının OKEK' i bulunmalıdır. Bu nedenle,

$(2, 4, 6)_{\text{OKEK}} = 12$ tür. Böylece, en küçük boyutlu küpün bir kenarı = 12 cm olur. Bir kenarı 12 cm olacak şekilde yerleştirilebilecek küp sayısı,

Küp sayısı = Kutunun hacmi / Küpün hacmi = $12.12.12 / 2.4.6 = 6.3.2 = 36$ tane olur.

Örnek :

a, b, c asal sayılar olmak üzere,

$$x = a^2 \cdot b^3 \cdot c^5 \text{ ve } y = a^5 \cdot c^2$$

ise, $(x, y)_{\text{OBEB}} = ?$ ve $(x, y)_{\text{OKEK}} = ?$ bulunuz.

Çözüm:

$$(x, y)_{\text{OBEB}} = a^2 \cdot c^2 = (a \cdot c)^2$$
$$(x, y)_{\text{OKEK}} = a^5 \cdot b^3 \cdot c^5 \text{ olur.}$$

Örnek :

Ayşe toplarını 2' şer 2' şer, 4' er 4' er, 6' şar 6' şar sayarsa, her defasında 1 top artıyor. Ayşe' nin en az kaç topu vardır?

Çözüm:

Top sayısı = $(2, 4, 6)_{\text{OKEK}} + 1 = 12 + 1 = 13$ tür.

Örnek :

2, 3, 4 sayılarına bölündüğünde 1 kalanını veren en büyük 2 basamaklı doğal sayı kaçtır?

Çözüm:

$$[(2, 3, 4)_{\text{OKEK}}] \cdot k + 1 \leq 99$$
$$24 \cdot k + 1 \leq 99$$

$k = 4$ olur. Buradan, sayı

$$24 \cdot 4 + 1 = 96 + 1 = 97$$

bulunur.

Örnek :

İki yangın sireni 5/7, 7/8 saat aralıklarla alarm vermektedirler. Bu iki yangın sireni aynı anda en son Cuma günü sabah 04.00' de alarm verdiklerine göre, hangi gün saat kaçta tekrar birlikte alarm verirler?

Çözüm:

Yangın sirenleri 5/7, 7/8 sayılarının OKEK' lerinde aynı anda alarm verirler. Dolayısıyla,
 $(5/7, 7/8)_{\text{OKEK}} = (5, 7)_{\text{OKEK}} / (7, 8)_{\text{OKEK}} = 35 / 1 = 35$ saat
sonra tekrar alarm verirler. O halde, Cumartesi günü saat 15.00' de tekrar alarm vereceklerdir.

Örnek :

Bir a doğal sayısı 5/3, 6 sayılarına bölündüğünde sonuç tamsayı olduğuna göre, bu koşula uyan en küçük a sayısı kaçtır?

Çözüm:

5/3 ile 6' nın OKEK' ini bulmalıyız. Bu takdirde,
 $(5/3, 6)_{\text{OKEK}} = (5, 6)_{\text{OKEK}} / (3, 1)_{\text{OKEK}} = 30 / 1 = 30$ olur.

Örnek :

OKEK' i 7 olan a ve b doğal sayılarının toplamının en küçük ve en büyük değerlerinin çarpımı kaç olur?

Çözüm:

$(a, b)_{\text{OKEK}} = 7$ ve sayıların farklı olmadıkları söylenmediğine göre,

$$a = 7 \text{ ve } b = 7$$

alınabilir. Bu durumda, a ile b' nin toplamının en büyük değeri

$$a + b = 7 + 7 = 14 \dots (1)$$

olur. Diğer taraftan,

a = 1 ve b = 7 alınırsa, a ile b' nin toplamının en küçük değeri

$$a + b = 1 + 7 = 8 \dots (2)$$

olur. Buradan, (1) ile (2) nin çarpımı $14 \cdot 8 = 112$ bulunur.